

## TD<sub>22</sub> – Propriétés métriques des courbes planes

### Exercice 1 ★

On considère la fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h : t \mapsto t\sqrt{t}$ . Calculer la longueur de la courbe représentative de  $h$ .

### Exercice 2 ★

Déterminer le rayon de courbure au sommet de l'hyperbole d'équation  $xy = k$  où  $k$  est un réel strictement positif fixé.

### Exercice 3 ★★

La lemniscate de Bernoulli a pour équation :

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

1. Tracer cette courbe.
2. Déterminer le cercle de courbure en tout point.

### Exercice 4 ★★★

Déterminer le repère de Frénet et la développée de la courbe plane  $(C)$  paramétrée dans un repère orthonormé par :

$$\begin{cases} x = \cos^2(t) + \ln |\sin(t)| \\ y = \sin(t) \cos(t) \end{cases}$$

### Exercice 5 ★★

Déterminer le repère de Frénet et la développée de la courbe plane donnée dans un repère orthonormé par l'équation cartésienne :  $y = a \ln \left( \cos \left( \frac{x}{a} \right) \right)$ , où  $a$  est un réel strictement positif fixe, et  $|x| < a \frac{\pi}{2}$ .

### Exercice 6 ★★★

Un point  $M$  décrit un cercle  $(C)$  de rayon  $R$ .

1. Soit  $A$  et  $B$  les projections orthogonales de  $M$  sur deux diamètres perpendiculaires de  $(C)$ . Déterminer et représenter le lieu  $(\Gamma)$  de la projection orthogonale de  $M$  sur la droite  $(AB)$ .
2. Déterminer l'enveloppe des droites  $(AB)$ .
3. Déterminer et tracer la développée de  $(\Gamma)$ .

### Exercice 7 ★★

La deltoïde est la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) + \sin(2t) \end{cases}$$

1. Étudier et tracer cette courbe.
2. Déterminer et tracer sa développée.

### Exercice 8 ★★

Déterminer la développée de la courbe  $\Gamma$  de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = 2 \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = 3 \operatorname{sh}(t) \end{cases}$$

## Exercices issus d'oraux

---

### Exercice 9 ★★

(Oral 2007)

Soit  $(C)$  paramétrée par  $x(t) = 3 \cos(t) + 3 \cos(2t) + \cos(3t)$  et  $y(t) = 3 \sin(t) + 3 \sin(2t) + \sin(3t)$ .

1. Tracer la courbe  $(C)$ .
  2. Déterminer la longueur de  $(C)$ .
  3. Déterminer la développée de  $(C)$ .
- 

### Exercice 10 ★★

(Oral 2010)

Soit  $\Gamma$  la courbe d'équation  $y = \ln(x)$ .

1. Déterminer la développée de  $\Gamma$ .
  2. En quel point de  $\Gamma$  le rayon de courbure est-il minimal (en valeur absolue) ?
- 

### Exercice 11 ★★

(Oral 2018)

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère  $f_n$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{ch}(nx)$ . On note  $C$  la courbe représentative de  $f_n$  et  $\Gamma$  sa développée.

1. Trouver la longueur de  $C$ .
2. Trouver un paramétrage de  $\Gamma$ .
3. Trouver la longueur de  $\Gamma$ .